TRIANGULOS

TRIANGULOS

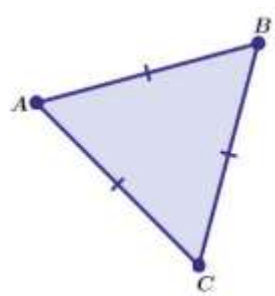
Un triángulo es una figura cerrada que tiene tres lados y tres ángulos. Algunos lo definen como polígono de tres ángulos (partiendo de su raíz etimológica). Generalmente empleamos el símbolo Δ y las letras de sus vértices para referirnos a un triángulo, por ejemplo: ΔABC hace referencia al triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, respectivamente.

Clasificación de los triángulos

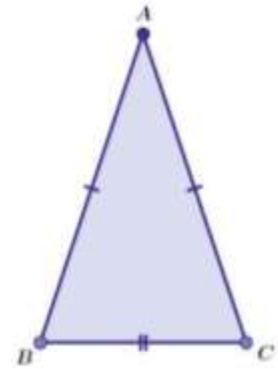
Los triángulos pueden ser clasificados de acuerdo con los siguientes criterios:

1. Por la medida de sus lados:

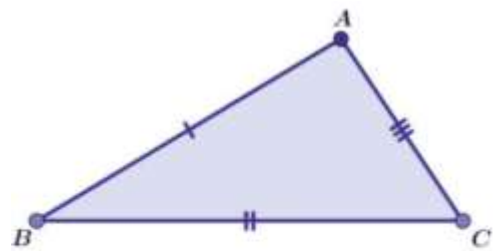
a) Equilátero. Es el que tiene sus tres lados iguales.



b) **Isósceles.** Tiene dos lados iguales y el tercero diferente a ellos.

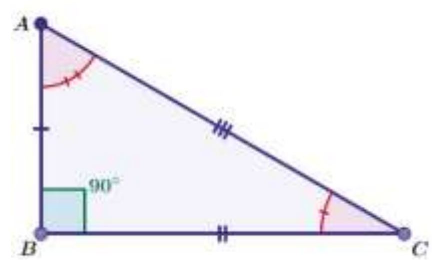


c) **Escaleno.** Tiene sus tres lados de diferente medida.

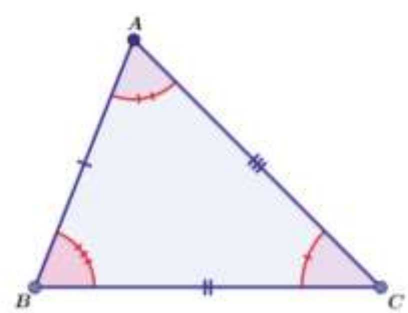


2. Por la abertura de sus ángulos:

a) Rectángulo. Tiene un ángulo interior recto y los otros dos agudos.

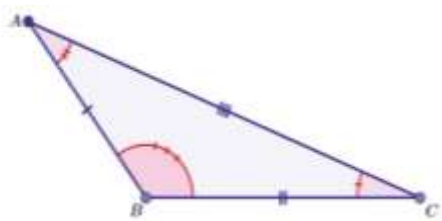


b) **Acutángulo.** Tiene sus tres ángulos interiores agudos.



c) Obtusángulo. Tiene un ángulo interior obtuso y los otros dos agudos.

Lo importante es distinguir las partes principales del triángulo: lados, ángulos, vértices y, desde luego, la sección del plano que delimitan sus lados, es decir: su superficie. El triángulo es también cada punto que se encuentra dentro de él.

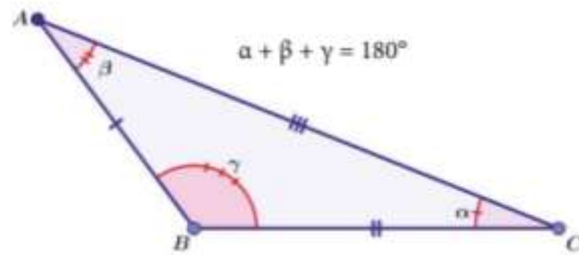


A continuación se muestra un link sobre la clasificación de los triángulos:

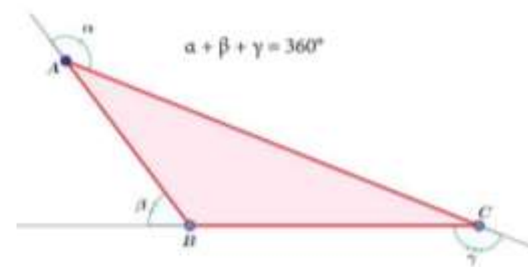
https://www.youtube.com/watch?v=t8NuJf_J7gc

Propiedades relativas de los triángulos.

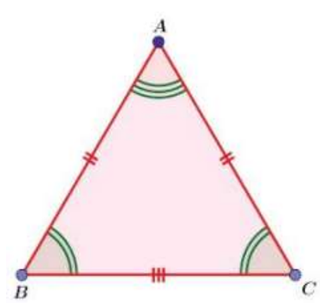
1. El triángulo es el polígono más simple.
2. El triángulo no tiene diagonales.
3. Tres puntos no alineados (colineales) forman siempre un triángulo.
4. Todo polígono puede ser dividido por medio de triángulos. Para un polígono de *n* lados se requieren como mínimo *n* 2– triángulos.
5. La suma de dos lados siempre es mayor que el tercero y la diferencia entre dos lados es siempre menor que el tercero (desigualdad triangular).
6. La suma de todos los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° (figura 1.43).



7. La suma de los ángulos exteriores de todo triángulo es igual a 360°

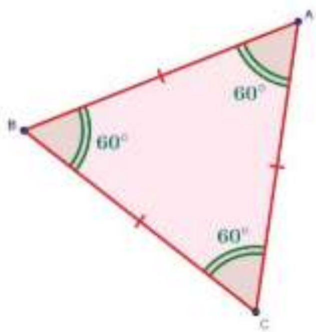


8. En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.



9. Cada ángulo de un triángulo

equilátero mide 60°



10. En todo triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto (90°) se llama **hipotenusa** y los lados adyacentes al ángulo recto se denominan **catetos**. La hipotenusa es mayor que los catetos; en consecuencia, el lado de mayor medida del triángulo.
11. En todo triángulo rectángulo los catetos son base y altura, respectivamente.
12. En un triángulo rectángulo isósceles cada uno de sus ángulos agudos mide 45°.
13. Los lados de cualquier triángulo rectángulo obedecen el enunciado del **teorema de Pitágoras**, que dice que “el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.

14. En un triángulo isósceles, la altura que corresponde a la base (lado desigual) también es mediana, bisectriz y mediatriz del triángulo.
15. En todo triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.
16. En todo triángulo rectángulo, la altura del ángulo recto lo divide en dos triángulos semejantes entre sí y, a su vez, semejantes con él.
17. En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a éste.

Todas estas propiedades pueden ser demostradas y empleadas en la solución de problemas. De hecho, en bloques siguientes se demuestran y se emplean algunas de ellas.

A continuación se muestra el link de un video sobre las propiedades de los triángulos:

https://www.youtube.com/watch?v=QlC2g04icfU

Ángulos internos y externos de un triángulo:

https://www.youtube.com/watch?v=r6zTX-SzZl4

Teorema de Pitágoras:

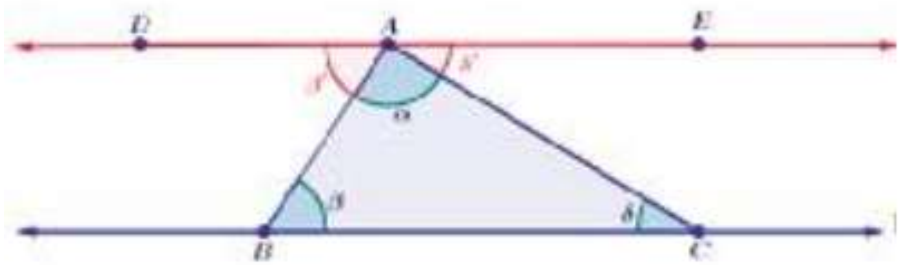
https://www.youtube.com/watch?v=rPlfmJDHfog

https://www.youtube.com/watch?v=i6KBfB3XFHE

Ejemplos:

1. Demuestra que la suma de ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.

Solución:



Paso 1. Prolongamos la base del triángulo BC y construimos una paralela que pase por A, como muestra la figura 1.49.

Paso 2. Observa que los lados AB y AC son transversales para el sistema de paralelas DE y BC. De este modo, podemos afirmar que:

$\angle ABC$ es alterno interno de $\angle DAB$ por lo que $m\angle DAB = m\angle ABC$; es decir, $\beta' = \beta$.

$\angle ACB$ es alterno interno de $\angle EAC$ por lo que $m\angle ACB = m\angle EAC$; es decir, $\delta' = \delta$.

Paso 3. Los ángulos $\angle DAB$, $\angle BAC$ y $\angle EAC$ son consecutivos y forman un ángulo llano; es decir, $\beta' + \alpha + \delta' = 180°$. Dado que $\beta' = \beta$ y que $\delta' = \delta$ tenemos que $\alpha + \beta + \delta = 180°$; que es lo que se quería demostrar; es decir, que "la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°".

Ejemplo 2.

Demuestra que la medida de un ángulo exterior de un triángulo cualquiera es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a dicho ángulo exterior.

Paso 1. *Observamos, en la figura 48, que el ángulo exterior en C es suplementario del ángulo interior en C; es decir,* $\delta + \theta = 180°$.

Paso 2. *Por suma de ángulos interiores, demostrada en el ejemplo anterior, tenemos que:* $\alpha + \beta + \delta = 180°$, *de donde, despejando* δ *se tiene que:* $\delta = 180° - (\alpha + \beta)$.

Paso 3. *Sustituyendo la expresión para* δ *en la expresión del paso 1, tenemos que:* $180° - (\alpha + \beta) + \theta = 180°$, *que lleva a*

$$\cancel{180°} - (\alpha + \beta) + \theta = \cancel{180°}$$

$$-(\alpha + \beta) + \theta = 0$$

pasamos sumando la expresión del paréntesis al otro lado: $\theta = 0 + (\alpha + \beta)$
y, finalmente, $\theta = \alpha + \beta$; *que es lo que se quería demostrar; es decir, que "la medida de un ángulo exterior (*θ*) es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a dicho ángulo exterior (*α *y* β*)".*

Ejemplo 3.

Determina el valor de *x* de la figura:

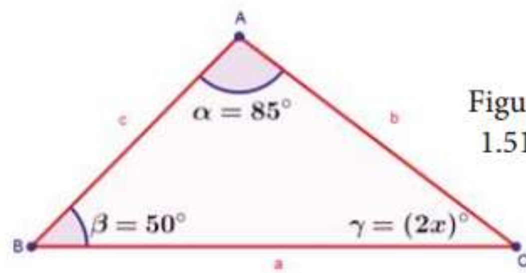


Figura 1.51.

Paso 1. *Por suma de ángulos interiores, demostrada en el primer ejemplo, tenemos que:* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Paso 2. *Sustituyendo los valores de los ángulos interiores de la Figura 49, tenemos la expresión:* $85° + 50° + (2x)° = 180°$
Paso 3. *Despejando el valor de* x *tenemos que*

$$135° + (2x)° = 180°$$

$$(2x)° = 180° - 135°$$

$$(2x)° = 45°$$

$$x = \frac{45°}{2°}$$

Finalmente
x= 22.5°

Ejemplo 4. En un triángulo isósceles los lados iguales miden el doble de la base, ¿cuánto mide la base, si el perímetro es de 75 cm?

Sea x la medida de la base, entonces

Dado que $P = 75$ *cm se tiene que*

$$2x + 2x + x = 75$$

$$5x = 75$$

$$x = \frac{75}{5}$$

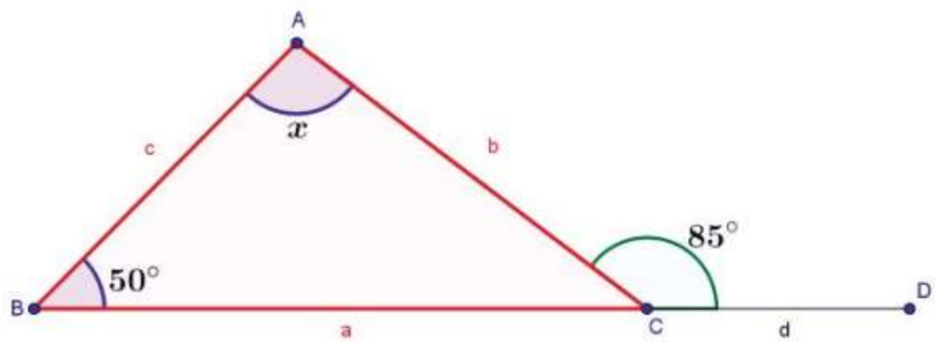
Finalmente:

$$x = 15$$

Respuesta: La base mide 15 cm.

Ejemplo 5.

Determina el valor de *x* en la figura:



Por la propiedad del ángulo exterior, demostrada en el ejemplo 2, tenemos que:

$$95° = x + 50°$$

Despejando la variable x se tiene que:

$$95° - 50° = x$$

$$45° = x$$

Aplicando la propiedad de simetría de la igualdad:

$$x = 45°$$

Ejemplo 6:

Si los tres ángulos interiores del triángulo ABC miden *x*° ¿Qué tipo de triángulo es ABC?

TRIANGULOS

Por la propiedad que enuncia que "a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa", podemos afirmar que los tres lados del triángulo son iguales; por lo que podemos concluir que el triángulo es un triángulo equilátero.

Para confirmar esto, recurramos a la propiedad que enuncia que los ángulos interiores de cualquier triángulo equilátero miden 60°.

Por la propiedad de suma de ángulos interiores tenemos que: $x^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$ *, de donde*

$$(3x)^\circ = 180^\circ$$

$$x = \frac{180^\circ}{3^\circ}$$

$x = 60^\circ$ *que confirma que el triángulo ABC es un triángulo equilátero.*